جامعة البعث	امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2016 - 2017	المدة: ساعة ونصف
كلية العلوم	أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)	العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات	سنة ثانية رياضيات	الاسم: رضوان

السؤال الأول (39 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن الحلقة Z_4 تشكل حلقة جزئية من الحلقة Z_{12} .

(2) إن حلقة المصفوفات $M_2(Z)$ فوق حلقة الأعداد الصحيحة Z تحقق خاصية الاختصار.

(3) مميز حلقة الخارج $Z_{12}/6Z_{12}$ يساوي 12 .

(4) إن عدد عناصر حلقة الخارج $2Z_{20}/4Z_{20}$ يساوي 4 عناصر .

(5) إن $2Z/3Z$ مثالية في حلقة الخارج $Z/3Z$.

(6) إن المثالية $10Z_{18}$ حد مباشر في الحلقة Z_{18} .

(7) إذا كان $f: R \to S$ تشاكلاً حلقياً و A مثالية في R ، فإن $f(A)$ مثالية في S .

(8) إن المثالية الصفرية $< 0 >$ أعظمية في الحلقة $(Z_5 , + , \cdot)$.

(9) إن المثالية $(2Z + 5Z)$ أولية في حلقة الأعداد الصحيحة Z .

(10) إن الحلقة $(Z_{21}, + , .)$ حلقة موضعية.

(11) إذا كانت $R = Z_{91}$ فإن $J(R) = <13>$.

(12) إذا كانت $A = 8Z\ ,\ B = 10Z$ مثاليتين في Z، فإن $A : B = 10Z$.

(13) إن الحدودية $2x + 1 \in Z_4[x]$ هي حدودية أولية فوق Z_4 .

السؤال الثاني (45 درجة): أثبت صحة ما يلي: لتكن R حلقة .

(1) إذا كانت R تبديلية و $a , b \in R$ و كان الجداء $a . b$ قاسماً للصفر، فإنه إما a قاسم للصفر أو b قاسم للصفر.

(2) كل عنصر جامد وغير صفري في الحلقة R لايكون عديم القوى .

(3) إذا كانت A مثالية يسارية أصغرية في R عندئذ $A = R.a$ حيث $0 \neq a \in A$.

(4) كل مثالية يسارية A عديمة القوى في الحلقة R تكون عديمة .

(5) إذا كانت R واحدية فإن أساس جاكبسون $J(R)$ يكون مثالية يسارية صغيرة في R .

(6) إذا كانت R واحدية و p مثالية في R، وكانت حلقة الخارج R/p منطقة تكاملية فإن p تكون أولية.

السؤال الثالث (16 درجة): إذا كانت R حلقة تبديلية و A , B مثاليتين في R وكان $\text{rad } A=\sqrt{A} = \{a: a \in R;\ \exists\ n\in Z^+;\ a^n \in A\}$. **أثبت صحة ما يلي:**

(1) $\text{rad } A$ مثالية في R .

(2) إذا كانت A أولية فإن $\text{rad } A = A$.

(3) إذا كانت $A =<5> , B = <3> , C = <2>$ ثلاث مثاليات في Z. أوجد : rad(AC + A ∩ B)

2017 – 6 – 11

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

الفصل الثاني للعام الدراسي 2016-2017

الجواب الأول: (39 درجة) لكل بند 3 درجات.

(1) خطأ، عناصر Z_4 هي صفوف تكافؤ (مجموعات) بالنسبة للتقاسم 4 بينما عناصر Z_{12} مجموعات بالتقاسم 12 (ليست محتواة في Z_4)

(2) خطأ، لأن $M_2(Z)$ ليست حلقة تامة.

(3) خطأ، يساوي 6.

(4) خطأ، يساوي 2.

(5) خطأ، لأن $2Z$ لا تحوي $3Z$.

(6) صح.

(7) خطأ، يجب أن يكون f غامراً.

(8) صح.

(9) خطأ، لأن $2Z+5Z=Z$ والمثالية الأولية $\neq$ الحلقة.

(10) خطأ، تحوي مثاليين أعظميين $<3>$ و $<7>$.

(11) خطأ، $J(R)=<7>\cap<13>$.

(12) خطأ، $A:B=4Z$

(13) خطأ، لأن $2x+1$ حدودية قابلة للقلب في $Z_4[x]$ حيث Z_4 ليست منطقة تكاملية.

الجواب الثاني (45 درجة) الأول 5 درجات ومن رقم (2) حتى (6) لكل طلب 8 درجات

(1) بما أن ab قاسم للصفر فإنه يوجد $0\neq c\in R$ بحيث $(ab)c=0$. لنفرض أن a ليس قاسماً للصفر عندئذ $bc=0$ وبما أن $c\neq 0$ فهذا يعني أن b قاسم للصفر.

(2) ليكن $a\neq 0 \in R$ عنصراً جامداً عندئذ $a^2=a$ ومنه $aa^2=a^2=a$ وهكذا... $a^n=a$ لأجل كل $n>1$ أي ليس بالإمكان إيجاد $n\in N^*$ بحيث $a^n=0$ ومنه a ليس عديم القوى.

ومنه يوجد $n \neq 1$ ... $1 \in A$

ويكون Ra مثالية يسارية في R وان $Ra \subseteq A$ وبما ان $Ra \neq 0$ وان

A اصغرية يكون $A = Ra$.

(4) لتكن A مثالية يسارية عديمة القوى في R عندئذ يوجد $n \in N^*$ يحقق

$A^n = 0$. من جهة أخرى ليكن $a \in A$ عندئذ $a^n = a \cdot a \ldots a \in A^n = 0$

ومنه أي عنصر من A عديم القوى . مما سبق نجد ان المثالية A عدية .

(5) لتكن D مثاليه يسارية في R تحقق $D + J(R) = R$ عندئذ يوجد $\in J(R)$.

و $a \in D$ بحيث $a + r = 1$ ومنه $1 - a = r \in J(R)$ ومنه العنصر $1-(1-a) = a$

قابل المعكوس من اليسار في R وهذا يبين ان $1 \in D \Leftarrow D = R$ اذا $J(R)$ ...

(6) R/P منطقة تكاملية عندئذ $1 + P \neq P$ ومنه $1 \notin P$ أي $P \neq R$. ليكن $a, b \in R$

بحيث $ab \in P$ عندئذ $ab + P = P$ ومنه $(a+P)(b+P) = P$ وبما ان

R/P لا تحتوي قواسم الصفر فانه اما $a + P = P$ او $b + P = P$ أي اما $a \in P$ او

$b \in P$ أي P أولية .

الجواب الثالث (16 درجة)

(1) $0 \in A \neq \phi$. ليكن $x, y \in radA$ عندئذ يوجد $n, m \in N^*$ بحيث $x^n, y^m \in A$

ومنه $(x-y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_k^{n+m} x^{(n+m)-k} (-y)^k \in A$ ومنه $x - y \in radA$. كما انه اياً كان $r \in R$

فان $(rx)^n = r^n x^n \in A$ وبالتالي $rx \in radA$ أي $radA$ مثالية في R.

(2) . $radA \supseteq A$. ليكن $x \in radA$ عندئذ يوجد $n \in N^*$ بحيث $x^n \in A$

وبما ان A اولية في R ينتج ان $x \in A$ ومنه $radA \subseteq A$ أي $radA = A$.

(3) . $AC = \langle 10 \rangle$, $A \cap B = \langle 15 \rangle$, $AC + A \cap B = \langle 5 \rangle$

$rad(AC + A \cap B) = rad(\langle 5 \rangle) = \langle 5 \rangle$

د. ايمان الجوهر

انتهت الأجوبة